数学と理科の接点

その１

「中学生にわかる微積分学」

岡田耕三
（岡山大学大学院自然科学研究科）

今日の予定

「速さ」についての復習
（多分，小学生レベル）

↓

微分係数、微分
（高校数学Ⅱレベル）

速さの話

速さ(speed)

単位時間あたりに進む道のり

時速100km (毎時100km)	1時間で100km進む
分速10m (毎分10m)	1分間で10m進む
秒速8km (毎秒8km)	1秒間で8km進む

時速4km で3時間歩くと $\boxed{12}$ km 進む.

時速 $\boxed{5}$ kmで4時間歩くと20km進む.

$$\frac{20\text{km}}{4\text{時間}} = 5\ \frac{\text{km}}{\text{時間}}$$

$$= 5\ \text{km/時}$$

時間 → hour

$$= 5\ \text{km/h}$$ とも書きます

☑ 単位のことを常に意識する習慣をつけましょう

問：地球は自転しています．では，赤道上に立っている人の速さは？

地球の赤道半径 = 約6400km、　直径×3.14=円周

地球円周 = 約 $\boxed{40000}$ km

２4時間で地球１周するのだから

速さは =約 $\boxed{1700}$ km/時

（注）
15 C° の空気中での音速
= 約 340 m/s (= 1225 km/h）

問1： 地球は公転しています．
平均公転半径は約1億5000万km
です．地球の時速を計算して下さ
い．

時　= hour　　時速5km = 5 km/h

分　= minute　　分速5km = 5 km/min

秒　= second　　秒速5km = 5 km/s

= 5 km/sec

（出典：Wikipedia）

km/h の表示がある

（出典：Wikipedia）

岡山-新大阪
180km (新幹線)
所要時間 44分

第1経路

所要時間 44分
乗車キロ 180.3 km
合計 6060円
定期 一ヶ月 130140円

乗換	着発	所要	駅名／路線・列車名	運賃
	15:14		岡山	
	◎	44分	新幹線のぞみ32号	2940円
	15:58		新大阪	

http://www.hyperdia.com/

$$\text{分速} = \frac{180\text{km}}{44\text{分}} = 4.1\ \text{km/分}$$

同じ速さ

$$\text{時速} = 4.1 \times 60 = 246\ \text{km/時}$$

☑ のぞみ号の速さ 246km/h は，のぞみ号が実際に1時間に走った道のりを調べなくても計算できる．

1秒間に走る道のりが分かれば，時速は計算できる．

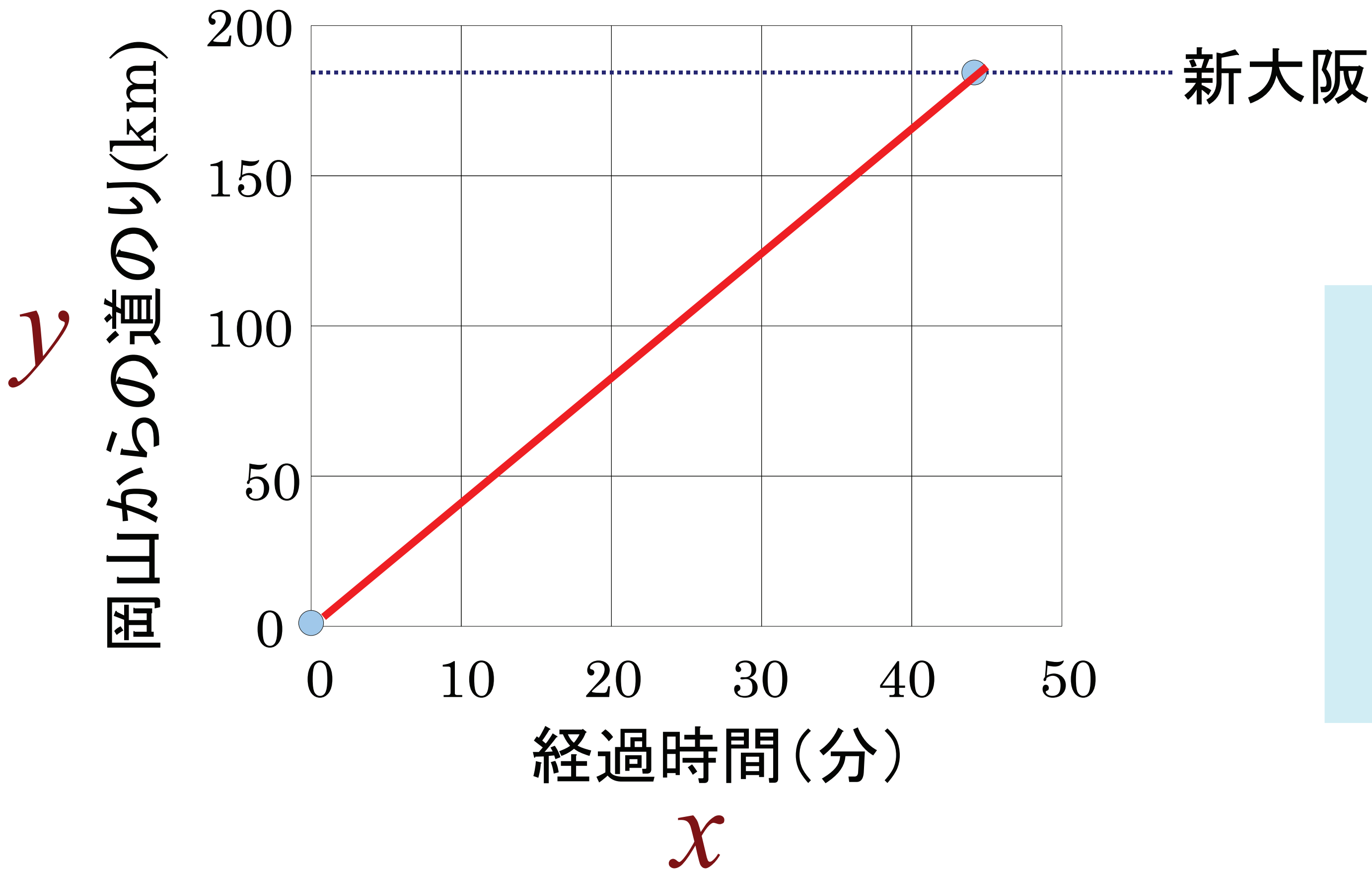
0.1秒間に走る道のりが分かれば，時速は計算できる．

0.01秒間に走る道のりが分かれば，・・・・・

・・・・

☑ のぞみ号が走った道のりと時間との $\boxed{\text{比}}$ が分かれば，のぞみ号の速さは分かる．

問　のぞみ号が分速4.1kmの一定の速さで岡山から新大阪へ向かっているとします．
岡山を出発してからの経過時間と道のりの関係をグラフにしてください．（新神戸には停車しないとします）



一定速度
⇕
傾きが一定

$y = 4.1x$ （ x に関する1次関数）

直線の傾きが速さを与える．

問2

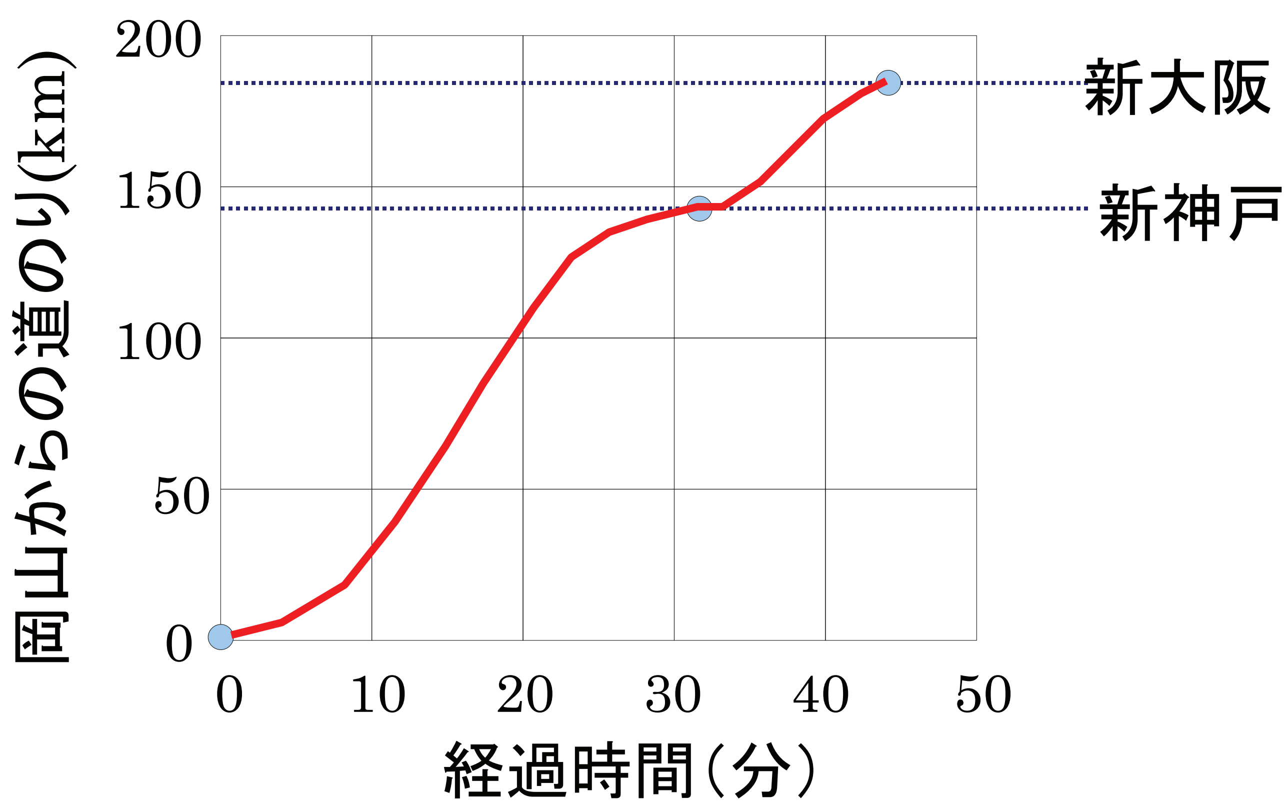
のぞみ号が分速$4.1\mathrm{km}$の一定の速さで走っているとするときに，15分間にのぞみ号が走る距離を求めて下さい．

ホントののぞみ号の運行は1次関数っぽいだろうか？

駅を出発するとき，
到着するとき，
列車の速さはどうかな？

岡山駅を出発し，新神戸駅で停車し，新大阪駅へ到着するまでの様子をグラフにしてみよう.
加速，減速も考えよう

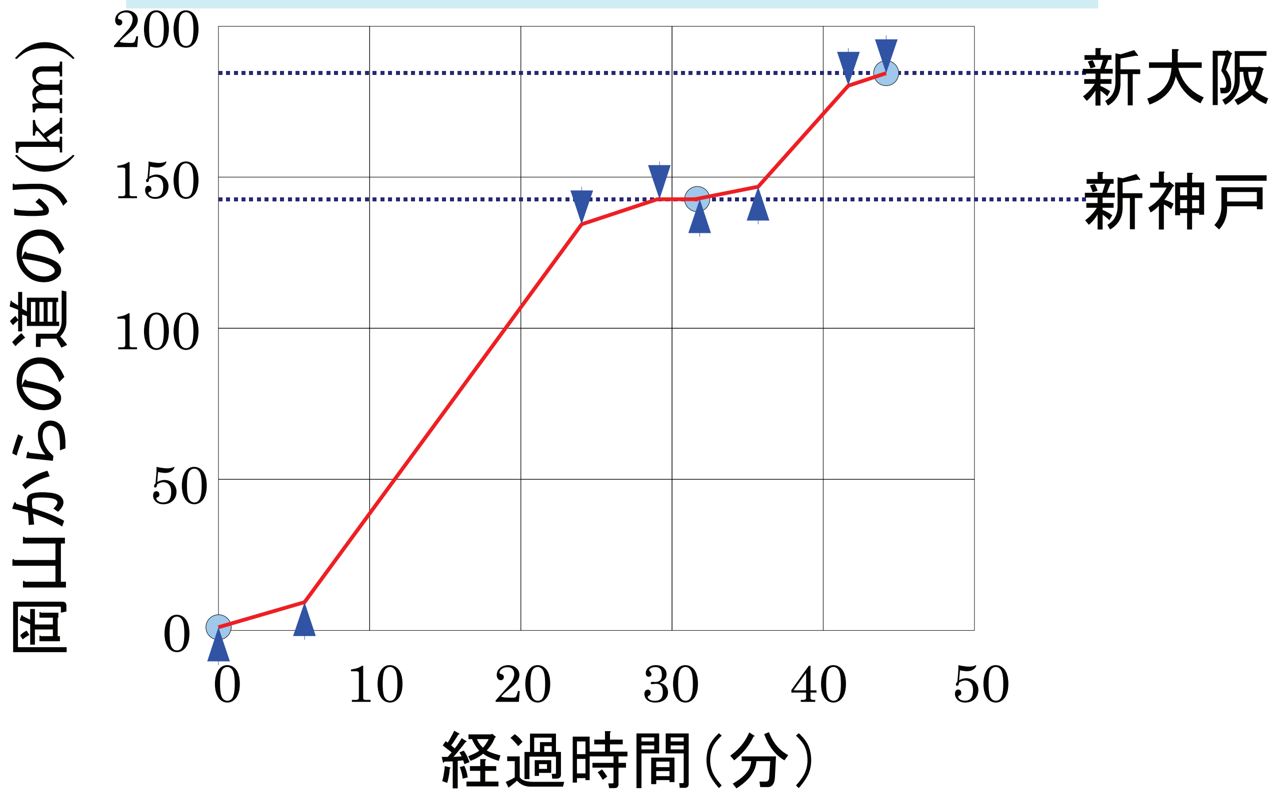
岡山 --- 新神戸 --- 新大阪 (のぞみ)		
143km	37km	
32分	12分	



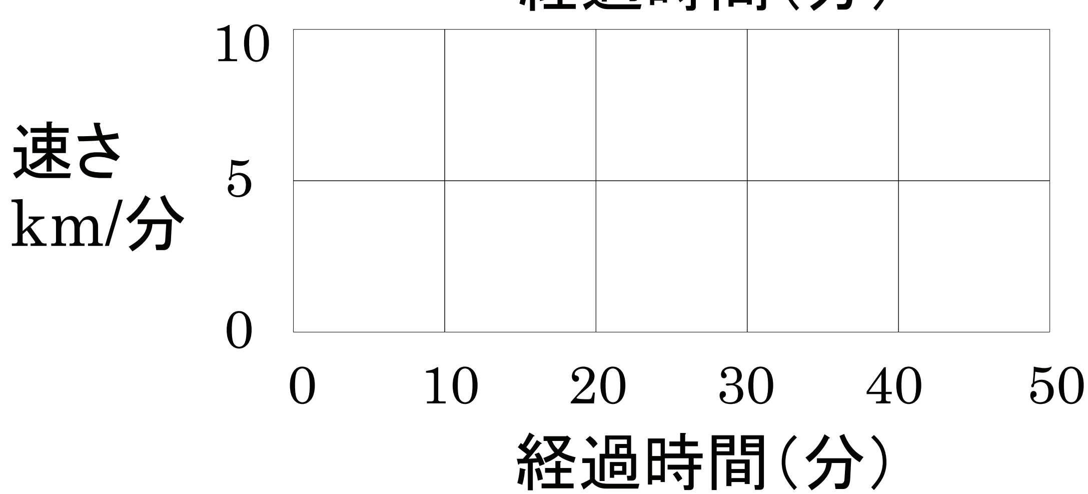
少し簡単化しました

岡山 --- 新神戸 --- 新大阪
143km 37km
32分 12分

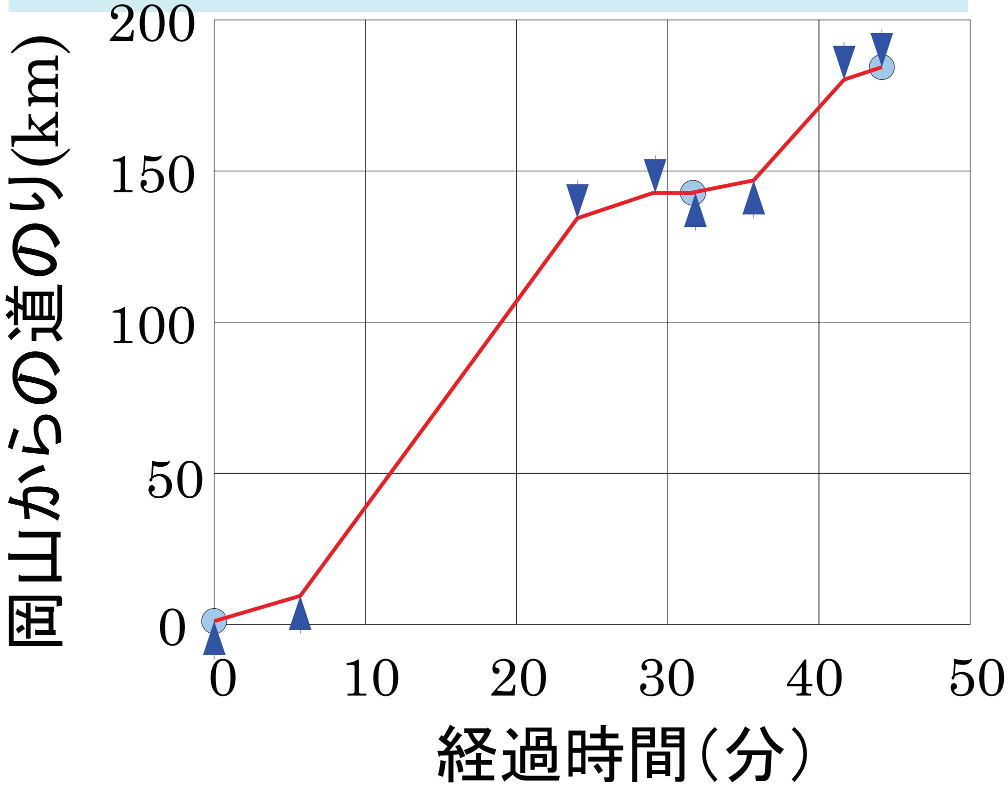
（注）
矢印は速度を変化させた時刻を表しています.



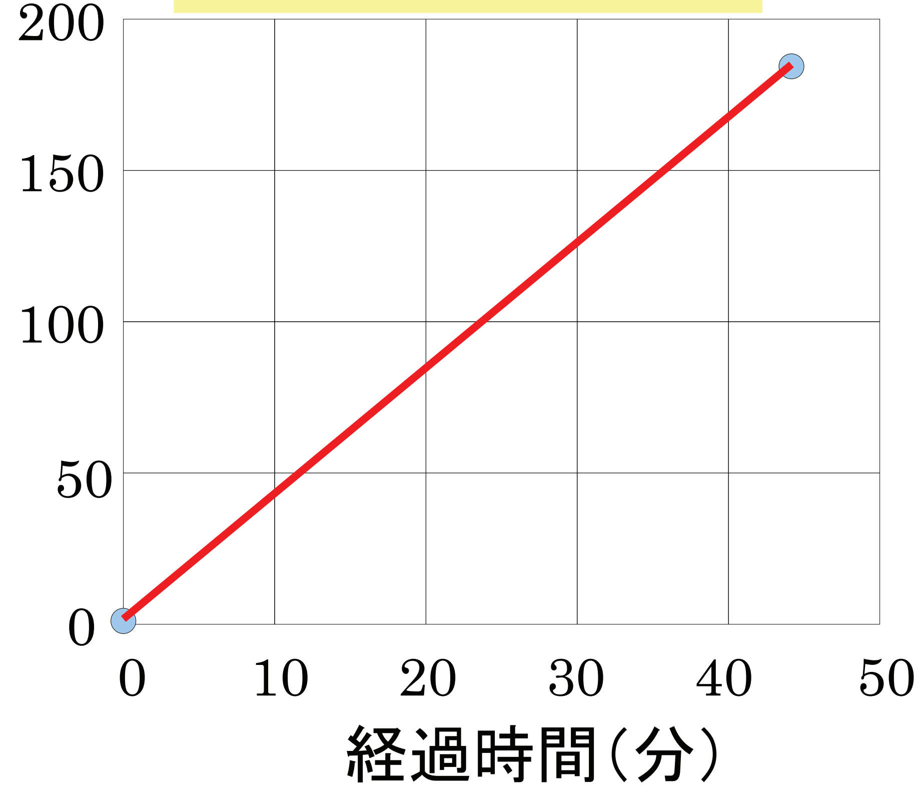
のぞみ号の速さの時間変化を調べてください.

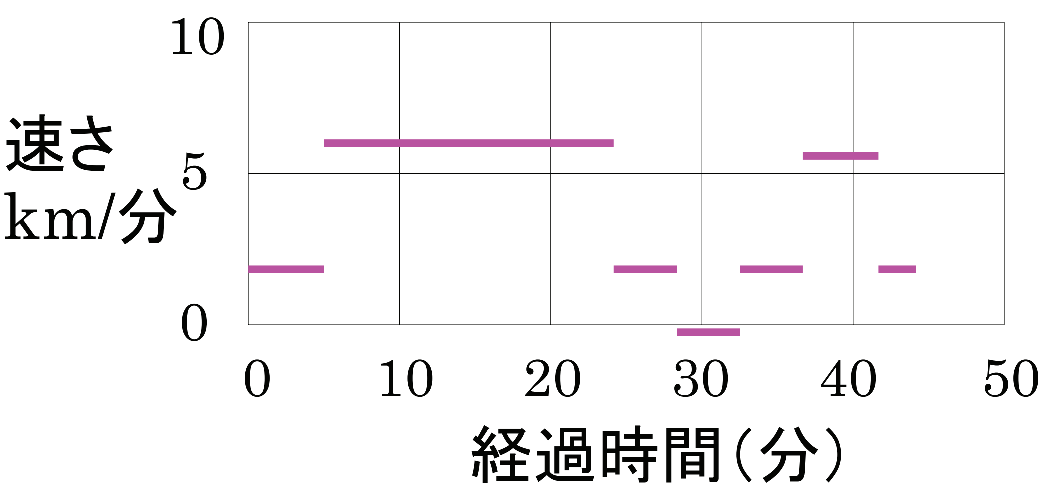


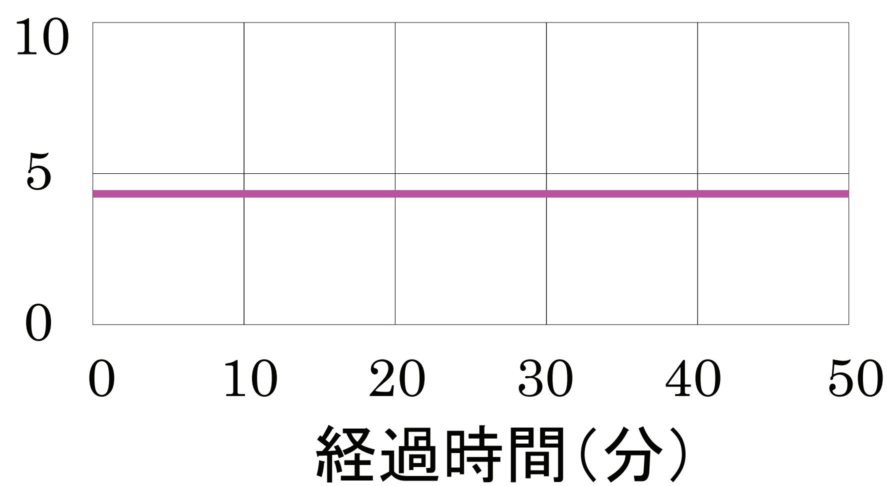
岡山 --- 新神戸 --- 新大阪
143km 37km
32分 12分

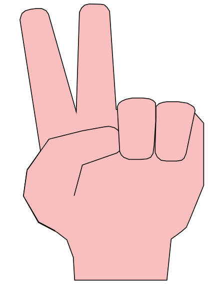


岡山 --- 新大阪
180km
44分









速さは「時間-道のり」グラフの**傾き**

「時間-道のり」が折れ線になると，**速さも時間変化する**

休憩？

これまでに，「道のり-時間」のグラフの傾きは速さになることを学びました．
「道のり-時間」のグラフが折れ曲がっていると，その折れ曲がりの時間で速さも変化することがわかりました．

では，
「道のり-時間」の関係がなめらかな曲線グラフのとき，どうなるかな？

速さが刻々と時間変化しそうです．
どうすれば速さをきちんと求めることができるでしょう？

（補足）２次関数

$y=5x+3$　　　　xの1次関数の例

$y=3x^2+5x+3$　xの2次関数の例.
x^2の項が含まれているので2次関数と呼ぶ.

x^2 は $x \times x$ の意味

x^4 は $x \times x \times x \times x$ の意味
xを４回掛け合わせる

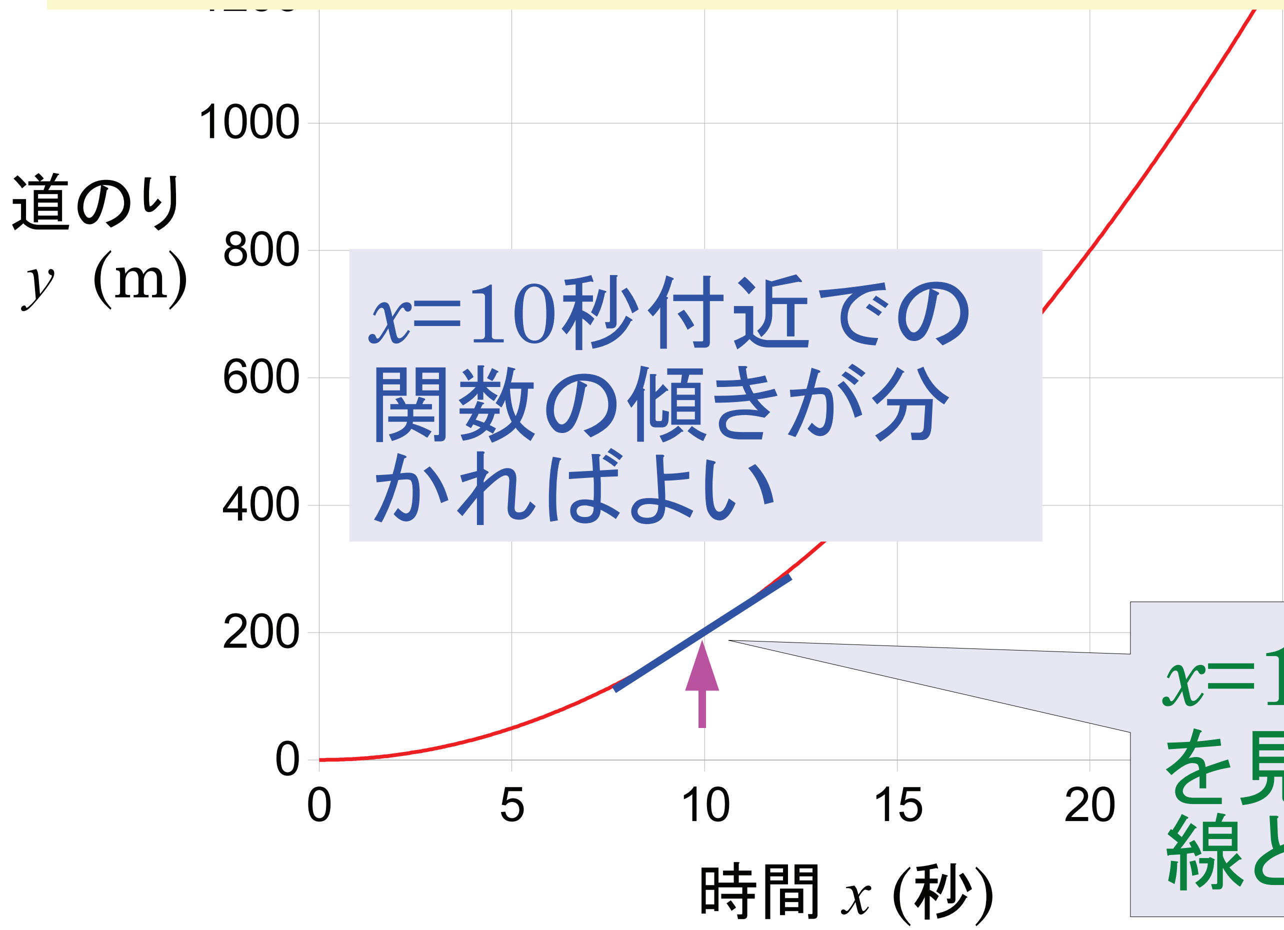
例題１

「時間−道のり」が２次関数のときはどうなるかな？

例えば，「x=10秒のときの速さ」はどうすれば求まるのだろう？

２次関数のとき

$$y = 2x^2$$



x=10秒付近での関数の傾きが分かればよい

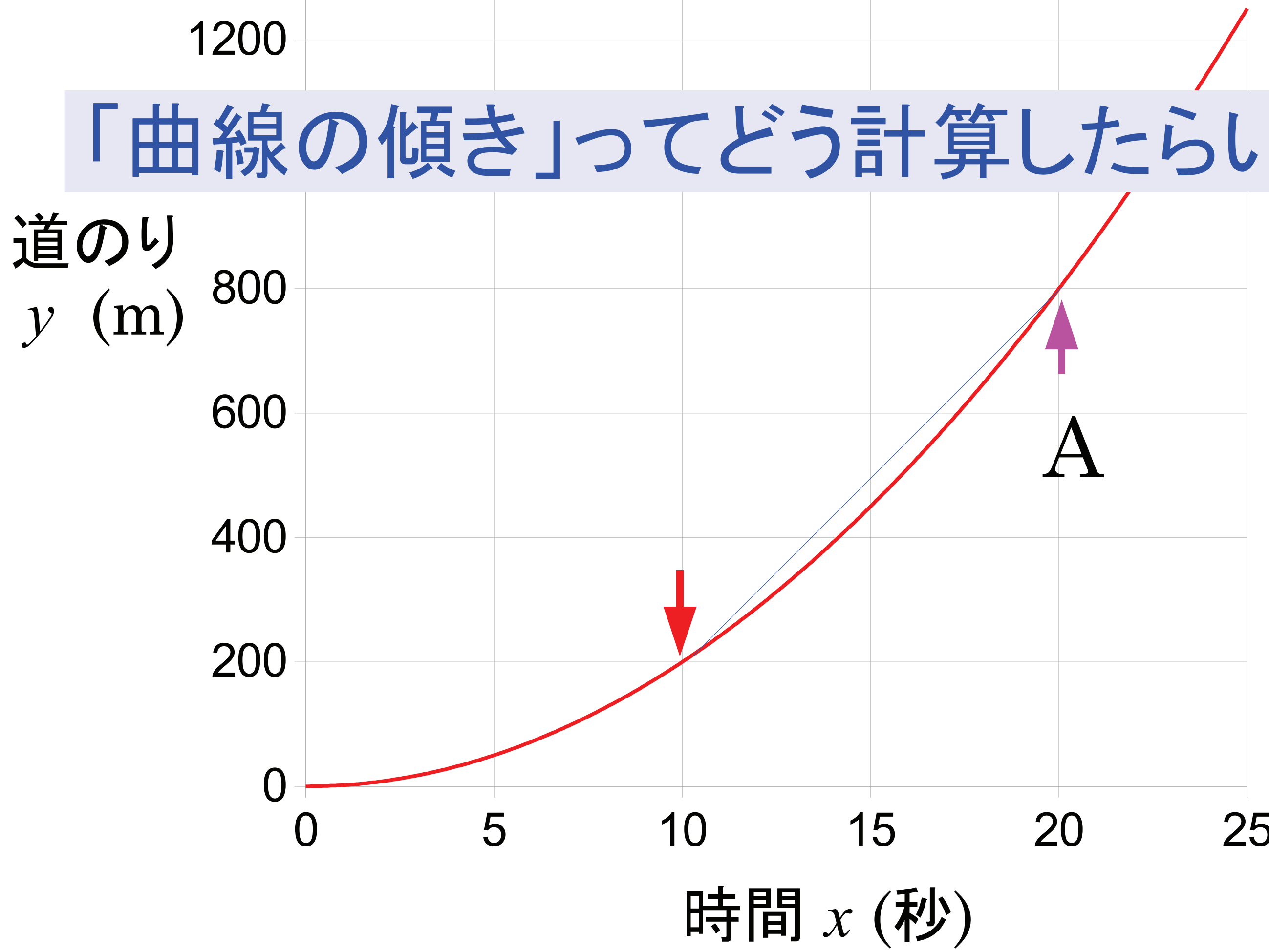
x=10秒付近の狭い部分を見れば，だいたい直線とみなすことができる

x=10秒のときの速さは？

２次関数のとき

$y=2x^2$

「曲線の傾き」ってどう計算したらいいのかな？

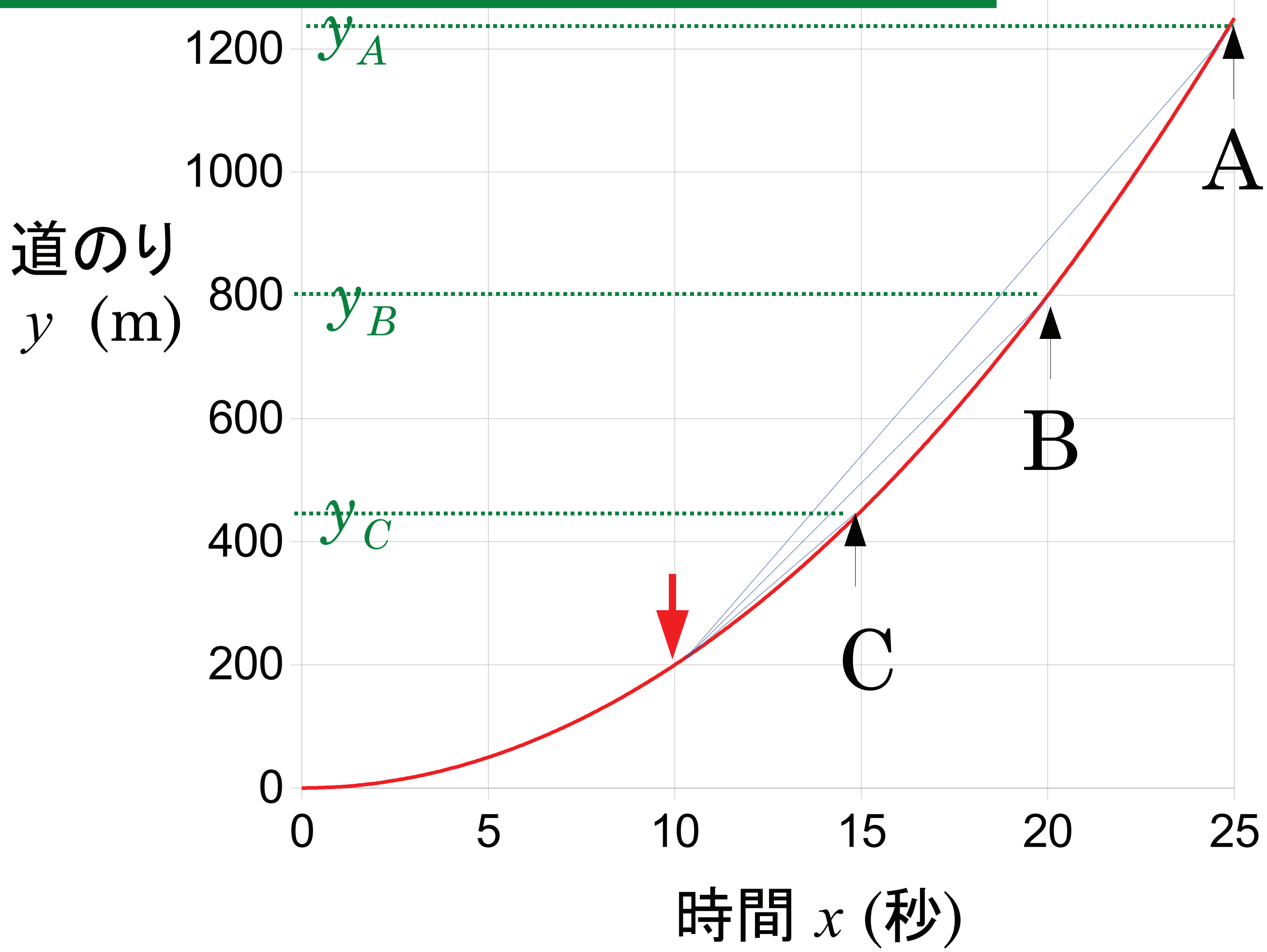


x=10秒から少し離れた時刻Aまで一定の速さで進行しているみなして，その速さを見積もってみてはどうだろうか．

平均速度

点Aは20秒が適当？ いろいろ試してみよう

x=10秒のときの速さは？



２次関数のとき

$y = 2x^2$

x=10秒から少し離れた時刻A, B, Cでの道のりを使って速さを見積もってみよう.

A: x = 25秒 $y_A = 2 \times 25 \times 25 = 1250\,\mathrm{m}$

B: x = 20秒 $y_B = 2 \times 20 \times 20 = 800\,\mathrm{m}$

C: x = 15秒 $y_C = 2 \times 15 \times 15 = 450\,\mathrm{m}$

A: $x = 25$秒 のとき

$$v_A = \boxed{\frac{1250-200}{25-10} = \frac{1050}{15} = 70} \text{ m/秒}$$

B: $x = 20$秒

$$v_B = \boxed{\frac{800-200}{20-10} = \frac{600}{10} = 60} \text{ m/秒}$$

C: $x = 15$秒

$$v_C = \boxed{\frac{450-200}{15-10} = \frac{250}{5} = 50} \text{ m/秒}$$

$x = 11$秒　のときは　　$y = 2 \times 11 \times 11 = 242\,\mathrm{m}$

$$v = \boxed{\frac{242-200}{11-10} = \frac{42}{1} = 42} \;\mathrm{m/秒}$$

$x = 10.1$秒　のときは　　$y = 2 \times 10.1 \times 10.1 = 204.02\,\mathrm{m}$

$$v = \boxed{\frac{204.02-200}{10.1-10} = \frac{4.02}{0.1} = 40.2} \;\mathrm{m/秒}$$

$x = 10.01$秒　のときは　$y = 2 \times 10.01 \times 10.01 = 200.4002\,\mathrm{m}$

$$v = \boxed{\frac{200.4002 - 200}{10.01 - 10} = \frac{0.4002}{0.01} = 40.02}\ \mathrm{m/秒}$$

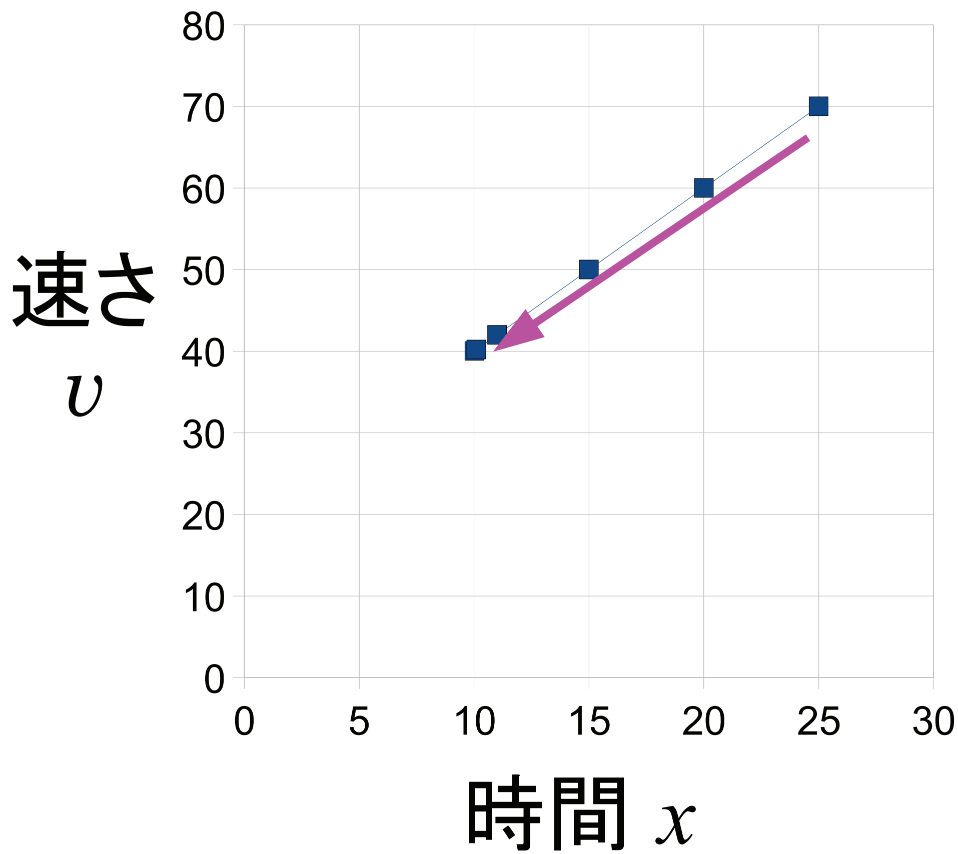
$x = 10$秒　のときは　$y = 2 \times 10 \times 10 = 200\,\mathrm{m}$

$$v = \boxed{\frac{200 - 200}{10 - 10} = \frac{0}{0} \quad ???}$$

この平均速度の計算式では
ホントに　$x = 10$秒にしてはいけません

まとめると

時間 x	速さ v
25	70
20	60
15	50
11	42
10.1	40.2
10.01	40.02



x が 10秒 に近づくと　速さは 40m/秒 に近づく.

（xをできるだけ10秒に近くするとホントの速さに近づく）

「速さは 40m/秒 に**収束**していく」と言います

（数学用語です）

道のりyが時間xの関数として分かっているときに,
例えば x=10秒での速さを求める方法

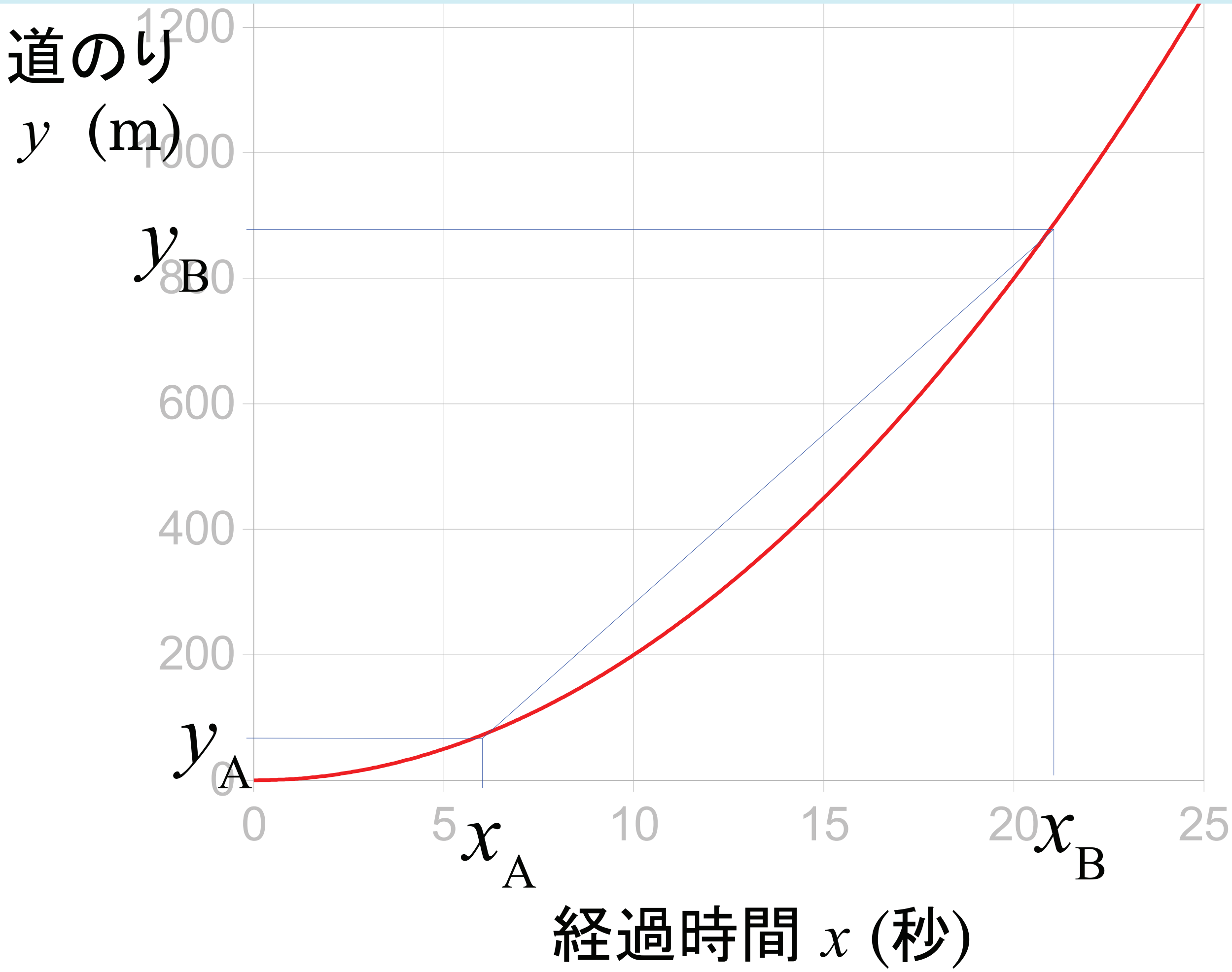
10秒にできるだけ近い時間を考えて,
10秒からその時間までの平均の速さを
計算すれば良い

休憩？

一般に，ある時間x_Aにおける速さを求めてみよう

x_{A}=10秒と思えば，これまでの話と同じだよ．

例題2　$y=2x^2$ のときに，時間x_Aにおける速さ



速さ　（直線の傾き）

平均変化率

$$V=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$=\frac{2x_B^2-2x_A^2}{x_B-x_A}$$

x_Aから少し離れた時間x_Bを考えて，
その間を平均の速さVを求めてみよう

そして x_Bを次第にx_Aに近づけていけば，ホントの速さが分かるはずだ

速さ $$V=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2x_B{}^2-2x_A{}^2}{x_B-x_A}$$

x_Bをどんどんx_Aに近づけていくと速さVはどうなるかな？

ここで $x_B=x_A$ を代入すると･･･

$$V=\frac{0}{0}$$

意味不明！
これはマズィ！

もう少しVの式を性質を調べて見ましょう.

公式

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$V = \frac{2x_B^{\ 2} - 2x_A^{\ 2}}{x_B - x_A}$$

分子を因数分解すると

$$= \frac{2(x_B - x_A)(x_B + x_A)}{x_B - x_A}$$

$$= 2(x_B + x_A)$$

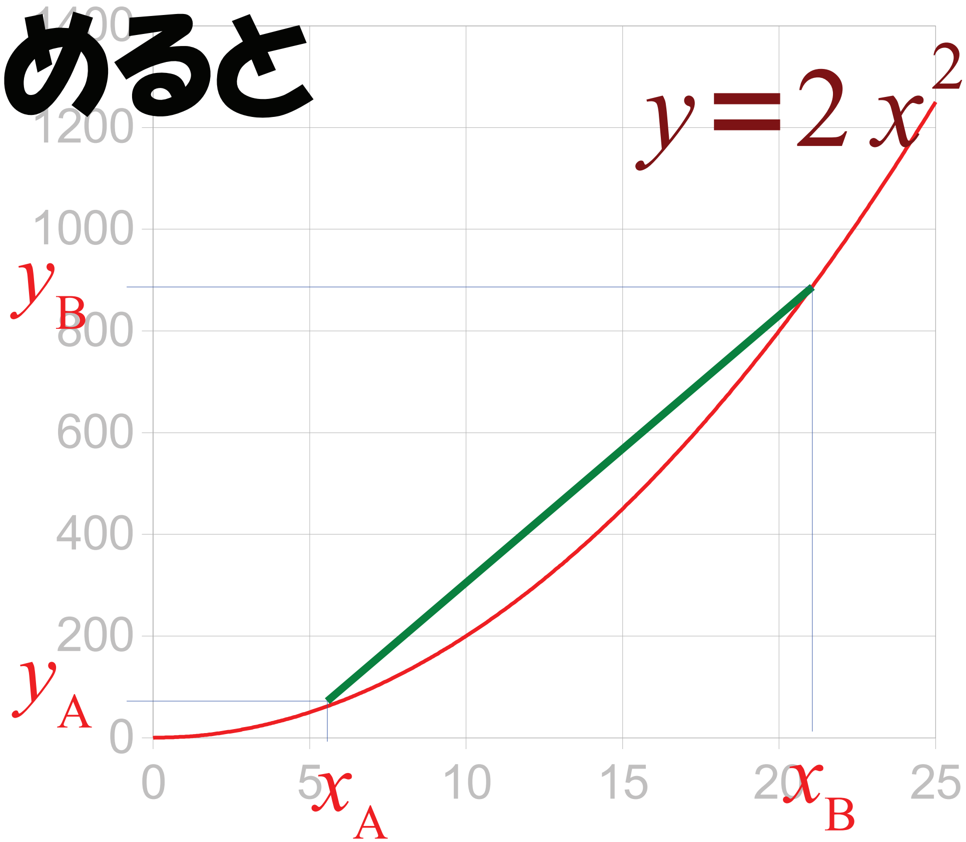
■成功の秘訣！■
$x_B = x_A$ としたときにゼロになってしまう部分をうまく約分できた

ここで x_B が　x_A に近づくと・・・

$$V = 2(x_A + x_A) \quad \Rightarrow \quad V = 4x_A$$

（ここでは $x_B = x_A$ を代入しちゃったけど，おかしなことにならない）

まとめると



速さ（平均変化率）

$$V=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$=\frac{2x_B^2-2x_A^2}{x_B-x_A}$$

x_B が x_A に近づけば,
速さ V (平均変化率)はどんどん $4x_A$ に近づいていく

$$\lim_{x_B\to x_A} V=4x_A$$

と書く

（注）lim はlimit (極限)という意味

結局、
$$\lim_{x_B \to x_A} V = 4x_A$$

道のり y が時間 x_A の関数として分かっているのであれば，時間 x_A における速さ V は x_A だけで決まる．x_Bの取り方にはよらない．つまり，時間 x_A における速さ V は

$$V = 4x_A$$

と書けます．

このように時間x_Aによって速さVの値が変化することがわかる

質問：　$x_\mathrm{A}=10$ [秒]での速さはどれだけですか？

前ページの問

質問：x_{A}=10 [秒]での速さはどれだけですか？

（答）　$V = 4x_A$　ですから

$$4 \times 10 = 40\ [\mathrm{m}/秒]$$

問3： 道のりy [km]と時間x [秒]の関係が

$$y = 7x^2$$

で与えられているとき，時間x_Aにおける速さVを求めてください．

問4： 道のりyと時間xの関係が前問のように与えられているとき，x_A=5秒における速さVを求めてください．

☑ $V = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ として $\displaystyle\lim_{x_B \to x_A} V = 4x_A$

を導いたのですが，この $\displaystyle\lim_{x_B \to x_A} \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ のことを

x_Aにおけるyの微分係数と言います.

☑ 道のりの微分係数が速さに等しいことになります.

（注） 微分係数という言葉は数学用語です.
y, xが道のりと経過時間ではないような場合にも
使うことができる言葉です.

（補足）

次のページでは 「Δx」, 「Δy」という表記があります.
この「Δx」は$\Delta \times x$という意味ではありません.
「Δx」で一つの記号です. 「Δy」も同様.

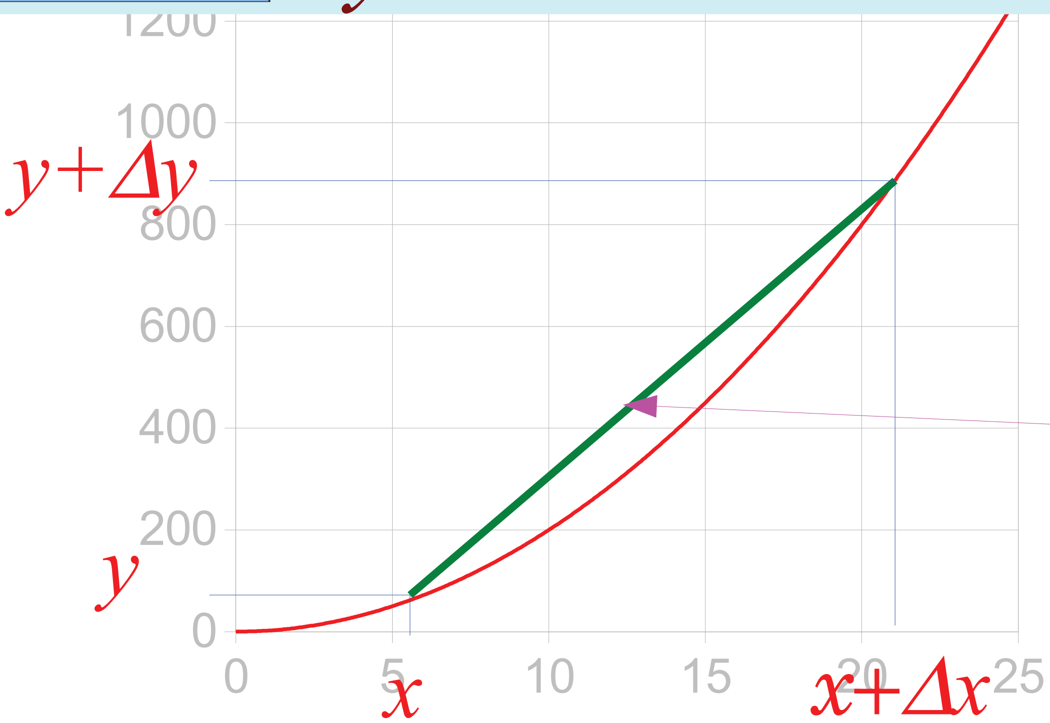
「Δx」なんて書かずに, 例えば h というような1文字の記号で書いても構わないのです.

ですが, xに関する微小量というのを表現するのにしばしば「Δx」と記号を使います.

ちなみに, この Δ は, ギリシャ文字です.
「デルタ」と読みます.
アルファベットのDに対応します.

次のページに書かれていることは, これまでのページに書かれていた内容とまったく同じです. 少し, 記号などを書き換えているだけです. そう思って見比べてください.

例題3　$y=2x^2$ の場合．　少し表現を変えると･･･



（注）「Δx」は$\Delta \times x$という意味ではない．「Δx」で一つの記号とみなす．「Δy」も同様．

速さ　（直線の傾き）

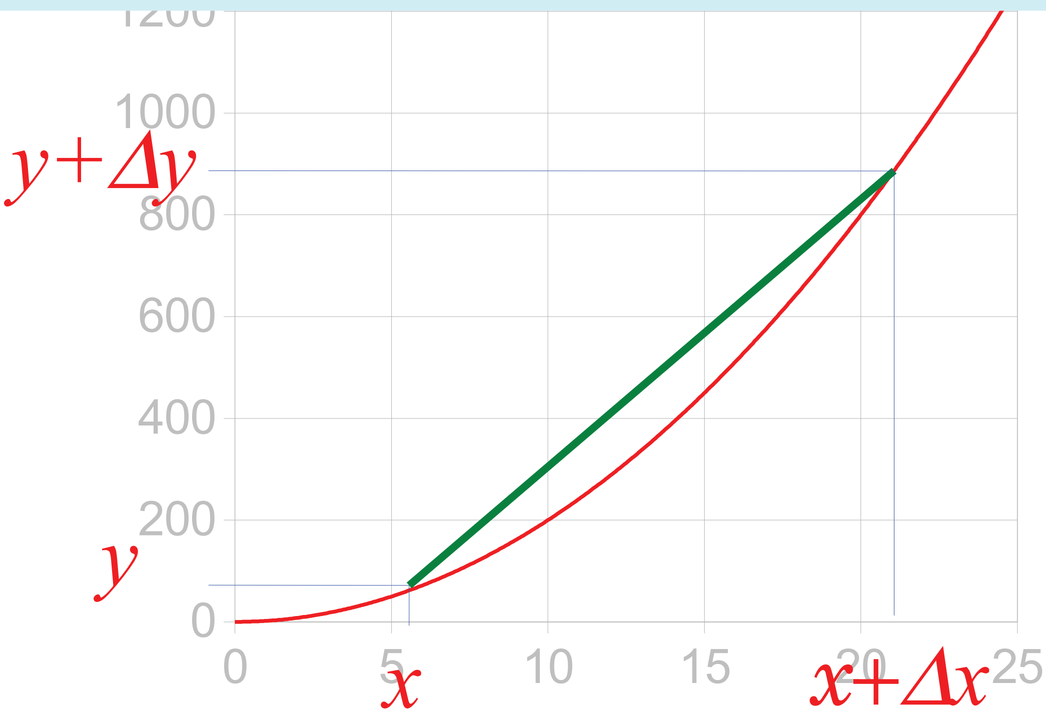
$$V=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

☑ 時間xにおける速さ

$$\lim_{\Delta x \to 0} V = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x$$

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を $\displaystyle\frac{dy}{dx}$ と書くなら $\boxed{\displaystyle\frac{dy}{dx}=4x}$ とも書ける

例題4　$y=2x^2$ の場合．　少し表現を変えると･･･



$$y=2x^2$$

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=2(x+\Delta x)^2-2x^2\\&=2[x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2]-2x^2\\&=4x(\Delta x)+2(\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2(\Delta x)$$ なのだから

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [4x + 2(\Delta x)] = 4x$$

つまり $\boxed{\frac{dy}{dx} = 4x}$ となる

yの微分係数 がxの関数として与えられているとき,
これを yの導関数 と言い,

$$\frac{dy}{dx}$$

と書きます.

yの導関数を求めることを「yを微分する」と言います.

例えば

$y=2x^2$ を微分すると $\frac{dy}{dx}=4x$

問5　　次の関数を微分しなさい

(1)　$y = x^2 + 2x + 1$

(2)　$y = 2x^3$

(3)　$y = \frac{1}{x+1}$

今日はここまで